Texte présenté lors des rencontres greco-tunisiennes (Université de la Macédoine de l'Ouest / Université de Tunis al-Manar) dans le cadre du projet « Traditions grecques dans les mathématiques et philosophies arabes » (Macédoine, 2007)

L'incommensurabilité de l'octave, évolution d'une découverte grecque dans les écrits arabes

Anas Ghrab

Institut Supérieur des Arts Multimédias ; `anas.ghrab@saramusik.org`

La proximité des mathématiques et de la musique est un fait connu, au moins depuis les travaux de Árpád Szabó [1], qui montrent le rôle joué par les recherches en musique dans la découverte de l'incommensurabilité. Cependant, l'accent n'est pas mis sur la découverte de l'incommensurabilité musicale — autrement-dit celle de l'intervalle d'octave —, mais sur l'incommensurabilité en général. L'incommensurabilité de l'octave, en tant que problème acoustique, marquera sans aucun doute l'évolution des théories musicales, jusqu'au XX[e] s., aussi bien en Orient qu'en Occident. Nous allons ici retracer l'émergence de ce problème particulier à partir des écrits grecques, puis nous observerons son évolution dans les écrits arabes [2].

1 Les écrits grecs et l'émergence du problème

1.1 Aristoxène et les pythagoriciens

Les informations qui nous restent sur Pythagore [3] indiquent que celui-ci avait pris connaissance de la relation existante entre les intervalles musicaux de base, l'`octave` (*diapason*), la `quinte` (*diapente*) et la `quarte` (*diatessaron*), et les rapports numériques

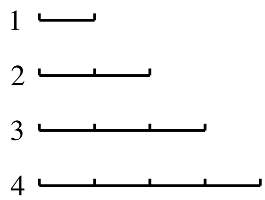
1. Árpád Szabó. *Les débuts des mathématiques grecques*. Paris : Vrin, 1977 ; Árpád Szabó. *L'aube des mathématiques grecques*. Paris : Vrin, 2000 ; Maurice Caveing. *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*. Paris : Presses Universitaire du Septentrion, 1998. isbn : 9-782859-39539-1.

2. Pour ce qui est des écrits arabes, signalons l'article de Jean-Claude Chabrier (Jean-Claude Chabrier. "Histoire des sciences arabes". Dans : t. 2. Paris : Seuil, 1997. Chap. Science musicale, p. 231–262. isbn : 2-02-030353-1, p. 231-261). L'article se focalise sur la transposition des emplacements des frettes sur les instruments à cordes en une vision moderne. Le problème « scientifique » et théorique sous-jacent n'est pas abordé, car il est considéré, comme c'est souvent le cas, comme une « spéculation sur les nombres ». L'intérêt est porté alors seulement sur les instruments de musique.

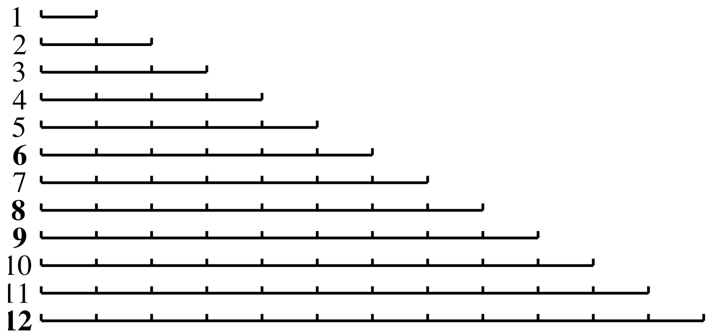
3. Cette section résume certaines informations déjà connues, mais leur donne une interprétation différente, mettant l'accent sur le fait que les pythagoriciens donnent des informations théoriquement corrects contrairement à Aristoxène de Tarente, et non pas qu'Aristoxène fournit une « théorie musicale correcte » alors que les pythagoriciens élaborent des spéculations sur les nombres.

2 à 1, de 3 à 2 et de 4 à 3 [4]. Cette relation appuie, par la formation de la décade $4+3+2+1=10$, ses réflexions métaphysiques sur les nombres [5].

En effet, un intervalle musical est définit par une « distance sonore » obtenue par deux sources sonores différentes en quantités. L'exemple le plus simple étant celui de longueur de cordes. Si nous prenons quatre cordes ayant pour longueur une, deux, trois et quatre unités — en supposant que les cordes ont la même tension —, nous obtenons entre chaque deux cordes un intervalle acoustique. Nous pouvons observer que les deux premières cordes forment le rapport 2 à 1, correspondant à l'interalle musical d'`octave`, tout comme les cordes 4 et 2. Par ailleurs, puisque les cordes-intervalles $3:2$ et $4:3$ possèdent une corde-terme commun, trois, il est possible d'en déduire que si on rajoute à l'intervalle musical de `quarte` $(4:3)$ l'intervalle de `quinte` $(3:2)$ nous obtenons l'intervalle d'`octave` $(2:1)$.



Par des équivalences de rapports, les nombres 4 3 2 ont été ramenés à 12 9 6. Cette nouvelle succession dévoile la valeur 8 qui montre que l'octave $(2:1)$ se constitue de deux `quartes` $(12:9=4:3$ et $8:6=4:3)$ et d'un intervalle $9:8$.



Nous observons aussi que cet intervalle de rapport $9:8$, dénommé « `ton` », est le complément de la `quarte` $(8:6=4:3)$ pour atteindre la `quinte` $(9:6=3:2)$.

4. Les termes « `octave` », « `quinte` » et « `quarte` » étant d'origine latine font référence à huit, cinq et quatre. Ces nombres dérivent d'un autre développement théorique qui a fait la jonction entre ces intervalles acoustiques et leur formation en nombre de notes : huit notes pour l'octave, cinq pour la quinte, et quatre pour la quarte. Il s'agit ici dans notre contexte des intervalles dans l'absolu, autrement-dit « vides », sans notes à l'intérieur de chaque intervalle. Il n'y donc pas de rapport, au stade ou nous en sommmes, entre ces chiffres et les relations abordées.

5. C'est ici que devait s'arrêter le rôle de Pythagore proprement-dit. La constitution d'une « échelle pythagoricienne » basée sur le cycle des quinte est un développement tardif.

Dans un univers où tout est conçu dans la commensurabilité, il aurait été souhaitable que le plus petit intervalle obtenu dans ce `système` composé de deux `quartes` et d'un `ton` puisse mesurer la totalité de l'`octave`. Mais il n'en est pas ainsi puisqu'on s'était rapidement rendu compte que le `ton` ne commensure pas la `quarte`. En effet, la `quarte` équivalante à la relation $256 : 192$ intègre deux `tons` $(9 : 8)$ avec un `reste` de rapport $256 : 243$:

256 (256 : 243) 243 (9 : 8) 216 (9 : 8) **192**

Nous trouvons le rapport $256 : 243$ chez Platon [6], mais c'est sous le nom de *limma* (`reste`) qu'il est connu. Si c'est par les pythagoriciens qu'il a été calculé et qu'il a été démontré qu'il ne s'agit pas de la moitié d'un `ton`, Aristoxène de Tarente a refusé l'idée que l'octave soit incommensurable. Il finit alors par considérer que les nombres ne s'adaptent pas à la musique, qui possèderait une science propre : « l'harmonique ». Pour lui ce *limma* est un `demi-ton` car l'oreille le perçoit ainsi, et la musique serait concernée par l'audition des intervalles et non par les nombres. De cette manière, il considère que l'octave se départage en six `tons` ou douze `demi-tons` [7].

1.2 L'école d'Alexandrie : Euclide et Ptolémée

Même sans citer Aristoxène de Tarente directement, les *sectio canonis* sont avant tout une réfutation de ses propos. Il s'agit d'un ouvrage organisé en propositions selon un schéma déductif [8], à la manière des *Éléments*, qui, dès la troisième proposition affirme que « dans un intervalle épimore ne tombe ni un, ni plusieurs nombres moyens proportionnels » [9]. La neuvième proposition montre spécifiquement que « six intervalles épogdoïques [10] sont plus grands qu'un intervalle double ». Autrement-dit six intervalles de `ton` dépassent l'intervalle double, c.-à-d. l'intervalle d'`octave` [11]. À la onzième proposition il montre que l'intervalle `ton` est un intervalle épogdoïque ; il n'est donc pas divisible en deux ou plus [12].

Ptolémée d'Alexandrie critique directement les Aristoxèniens [13] [14]. Par méthode géométrique, il montre, dans la dixième proposition du Premier Livre qu'il n'est pas

6. *Le Timée*, 36b.

7. Des divisions plus petites on également été considérées.

8. André BARBERA. *The Euclidean Division of the Canon : Greek and Latin Sources*. Greek and Latin Music Theory. Lincoln et London : University of Nebraska Press, 1991.

9. Rappelons qu'un intervalle épimore est un intervalle dont les termes sont dans le rapport $(n+1)/n$.

10. L'intervalle `épogdoïque` correspond au rapport $9 : 8$.

11. $(9 : 8)^6 > 2 : 1$.

12. BARBERA, op. cit., p. 171.

13. Jon SOLOMON. *Ptolemy Harmonics : Translation & Commentary*. Mnemosyne. Leiden-Boston-Köln : Brill, 2000. ISBN : 90-04-11591-9, p. 28.

14. Ptolémée critique également les pythagoriciens pour leur refus de l'intervalle $8 : 3$ en tant que consonance, sous prétexte qu'il n'est pas de la forme $(n+1)/n$.

approprié de considérer que la `quarte` contient deux `tons` et un `demi-ton` [15]. Dans la proposition qui suit, ce n'est pas seulement par la géométrie qu'il montre que six `tons` dépassent l'intervalle `double`, mais aussi par un moyen auditif. Il conçoit alors un *canon* sur lequelle huit cordes ont été attachées. Les septs premières cordes évoluent selon la proportion de $9 : 8$, formant six `tons` alors que la dernière corde est la moité de la première. Si la construction de l'instrument s'est correctement effectuée, la différence de hauteur entre les septième et huitième cordes serait alors audible.

L'usage d'un moyen auditif était certainement important pour Ptolémée, sans aucun doute pour faire face aux critiques aristoxéniennes considérant que les calculs pythagoriciens n'ont pas de relation avec la musique, c.-à-d. avec les sons réels. La réalisation sonore corrobore ici les caluls. Al-Fārābī, comme nous le verrons plus bas, s'appuiera constamment sur cette relation mise en parallèle entre les calculs et les instruments sonores.

2 Les écrits arabes et le départage de l'octave

2.1 La première école arabe

Les premiers textes arabes exposent généralement une pratique basée sur le cycle des `quintes` [16]. Le cycle des quintes étant un système musical n'utilisant que les intervalles $2 : 1$, $3 : 2$, $4 : 3$ et $9 : 8$, on y utilisera forcément le *limma* (256 : 243), intervalle restant en incluant deux intervalles de `tons` successifs dans la `quarte`. Nous retrouvons ce système chez : Iḫwān al-Ṣafā (deuxième moitié du X^{e} siècle) et dans le premier livre de Ṣafī al-Dīn al-Urmawī (m. 1294). Les musicologues ayant abordé le sujet n'hésitent pas à inclure Ibn al-Munağğim (m. 912) et al-Kindī (m. après 870). Cependant, Ibn al-Munağğim n'a donné aucune indication claire concernant l'emplacement des frettes et al-Kindī n'indique pas ce système dans tous ses écrits. Dans son « ancien traité sur le ʿūd », « le philosophie des arabes » décrit l'emplacement suivant des frettes sur le *ʿūd* : *index* à $10 : 9$, *médius* à $6 : 5$, *annulaire* à $5 : 4$ et *auriculaire* à $4 : 3$ [17]. Nous pensons donc qu'il ne serait pas prudent de généraliser systématiquement ce système basé sur le cycle des quintes à toute la « première école arabe ».

Même suite à l'adoption d'al-Fārābī d'un autre système issu de Ptolémée, ce système basée sur le cycles des quintes continuera à exister et se développer. On retrouvera sa forme développée notamment chez Ṣafī al-Dīn al-Urmawī, dans son *Kitāb al-Adwār* [18].

15. Solomon, op. cit., p. 31.

16. Système connu également sous le nom de « système pythagoricien », mais la relation avec Pythagore est douteuse.

17. Pour plus d'information sur ce sujet, voir notre présentation sur cette page `http://www.saramusik.org/article.php3?id_article=15`.

18. Voir section 2.3 page 40.

2.2 Al-Fārābī et la redécouverte de Ptolémée

Calcul des intervalles

Même si le calcul des intervalles est parfaitement maîtrisé à travers la lecture des textes grecs, l'exposé de la « méthode de calcul », occupant une section particulière de l'ouvrage, ne semble apparaître qu'à partir d'al-Fārābī. Celui-ci présente explicitement la manière de doubler un intervalle, d'ajouter deux intervalles l'un à l'autre, de trouver la moitié d'un intervalle, de partager un intervalle en plusieurs autres intervalles, et de soustraire des intervalles [19]. Cet exposé se résume ainsi :

– Pour doubler un intervalle, on multiplie chacun de ses termes par lui même : le double de $\frac{n_1}{n_2}$ est $(\frac{n_1}{n_2})^2$.
– Pour additionner deux intervalles on multiplie leurs termes : la somme résultant des deux intervalles $\frac{n_1}{n_2}$ et $\frac{n_3}{n_4}$ est $\frac{n_1}{n_2} \times \frac{n_3}{n_4}$.
– La moitié d'un intervalle consiste à départager ses termes par moyenne arithmérique : la multiplication par 2 de l'intervalle $\frac{n_1}{n_2}$ donne trois termes successifs $2n_1$, $n_1 + n_2$ et $2n_2$.
– Le départage d'un intervalle $\frac{n+1}{n}$ en m intervalles donne les intervalles : $\frac{mn+1}{mn}$, $\frac{mn+2}{mn+1}, \frac{mn+3}{mn+2} \ldots, \frac{mn+m}{mn+(m-1)}$.

Cette dernière opération sera à la base de l'établissement des `genres`, qui sont un départage de la `quarte` en trois intervalles.

Établissement des genres

À travers la lecture de Ptolémée, al-Fārābī a eu un écho de l'approche aristoxènienne. Il établit ainsi une discussion sur le demi-ton et sur l'échelle formée par 12 demi-tons [20]. Al-Fārābī sera alors le premier auteur arabe à reprendre, classifier et systématiser les intervalles et les genres, dans la tradition de Ptolémée ; tradition déjà entamée par Archytas. L'approche principale consister à distinguer les `genres forts` (*ǧins qawiyy*) et les `genres doux` (*ǧins layyin*) selon la taille des rapports épimores constituant la quarte. Le genre est `fort` si aucun intervalle du genre n'est plus grand que la somme des deux autres ; il sera `doux` si un intervalle du genre est plus grand que la somme des deux autres. Afin de mieux saisir l'organisation du système, nous présentons ici la classification établie par al-Fārābī [21] puis par Ibn Sīnā. [22]

---

19. Rodolphe D'ERLANGER. *La Musique Arabe*. T. 1. Paris : Paul Geuthner, 1930, p. 93–100.
20. Ibid., p. 61–63.
21. Al-Fārābī aborde la classification des genres à la dernière section du Premier Discours, Livre I du *Kitāb al-Mūsīqā al-Kabīr* (Ibid., p. 103–113) (Abū Naṣr AL-FĀRĀBĪ. *Kitāb al-Mūsīqī al-Kabīr, Grand Book of Music, by Abū Naṣr al-Fārābī*. Éd. par Eckhard NEUBAUER. T. C61. Facsimile Editions. Frankfurt am Main : Institut für Geschichte der Arabischen-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Univ, 1998, p. 138–144 ; 473–478) (Abū Naṣr AL-FĀRĀBĪ. *Kitāb al-Mūsīqā al-Kabīr*. Texte établi par Ġaṭṭās ʻAbd al-Malik Ḫašaba. al-Qāhira 1967, p. 278–318).
22. Troisième Discours du *Kitāb al-Šifā* (D'ERLANGER, op. cit., p. 139–155).

Les genres chez al-Fārābī

Les genres doux Selon l'emplacement du plus grand intervalle, nous aurons les genres doux non-ordonnés (le plus grand intervalle est entre les deux autres), ou les genres doux ordonnés (le plus grand intervalle est placé à l'une des extrêmités du genre) [23]. Un calcul effectué par al-Fārābī permet de savoir que les genres doux doivent contenir l'un de ce trois intervalles : 5/4, 6/5 ou 7/6. Ces intervalles, retranchés de la quarte, leur reste sera partagé en deux. Les trois genres obtenus seront appelés genres doux ordonnés non-consécutifs car leurs intervalles ne sont pas classé en ordre de grandeur. Le plus petit occupe le centre :

31/30, 32/31, **5/4**
19/18, 20/19, **6/5**
15/14, 16/15, **7/6**

Afin d'avoir des genres doux ordonnés consécutifs, on suivra la même règle en déduisant, tour à tour, de la quarte les mêmes intervalles que précédemment (5/4, 6/5, 7/6) ; l'intervalle restant est ensuite partagé en plusieurs autres, qui seront combinés entre eux pour ne constituer que deux intervalles inégaux, dont le plus grand sera placé à la suite du premier. On aura lors les genres doux ordonnés consécutifs comme suit :

46/45, 24/23, **5/4**
28/27, 15/14, **6/5**
22/21, 12/11, **7/6**

Les genres forts Les genres forts sont obtenus avec les rapports 8/7, 9/8 et 10/9. Déduisons tout d'abord de la quarte l'intervalle qui a pour rapport 8/7, puis, du reste, un intervalle du même rapport. La série des trois intervalles ainsi obtenus compose la première espèce du genre fort dit à redoublement. Les deux autres sont obtenus de la même manière avec les rapports 9/8 et 10/9 :

8/7, **8/7**, 49/48
9/8, **9/8**, 254/243
10/9, **10/9**, 27/25

La deuxième espèce de genre fort, appelée genre fort conjoint est obtenue par déduction, à partir de la quarte, de deux intervalles dont les rapports sont consécutifs. Si on déduit de la quarte l'intervalle 8/7 puis 9/8, l'intervalle restant sera de rapport 28/27. De même, les deux autres genres forts conjoints ont pour rapports 9/8, 10/9, 16/15, et 10/9, 11/10, 12/11 :

8/7, **9/8**, 28/27
9/8, **10/9**, 16/15
10/9, **11/19**, 12/11

23. Notons que les genres non-ordonnés ont été écartés par al-Fārābī car ils seraient « fort peu consonants à l'oreille » (ومن هذه الأجناس، أمّا غير المنتظم منها فلنخلّ عنه من قبل أنّ اتفاقات أصنافه المسموعة ناقصة جدّا) (AL-FĀRĀBĪ, *Kitāb al-Mūsīqī al-Kabīr, Grand Book of Music, by Abū Naṣr al-Fārābī*, p. 139)

Finalement, en déduisant de la quarte deux intervalles inégaux non-consécutifs, nous aurons à chaque fois, avec l'intervalle restant, un genre `fort disjoint`. Al-Fārābī en propose les genres suivants [24] :

8/7, **10/9**, 21/20
9/8, **11/10**, 320/297
11/10, **13/12**, 160/143

Les genres chez Ibn Sīnā

Ibn Sīnā répartit également les genres en `forts` (8/7, 9/8 et 10/9) et `doux` (5/4, 6/5, 7/6). L'organisation de ces genres est cependant légèrement différentes de celle d'al-Fārābī et suit plutôt l'ordre des grandeurs des intervalles.

Genres `forts` [25] :

64, 56, 49, 48 ==> **8/7**, 8/7, 49/48
36, 32, 28, 27 ==> **8/7**, 9/8, 28/27
80, 70, 63, 60 ==> **8/7**, 10/9, 21/20
(105, 120, 132, 140 ==> **8/7**, 11/10, 35/33)*
(96, 84, 77, 72 ==> **8/7**, 12/11, 77/72)*
16, 14, 13, 12 ==> **8/7**, 14/13, 13/12
324, 288, 256, 243 ==> 9/8, 9/8, 256/243
20, 18, 16, 15 ==> **9/8**, 10/9, 16/15
(**9/8**, 11/10, 320/297)
9/8, 12/11, 88/81
468, 432, 384, 351 ==> **9/8**, 13/12, 384/351
252, 224, 208, 189 ==> **9/8**, 14/13, 208/189

Les genres doux Concernant les genres `doux`, Ibn Sīnā fait une distinction entre les genres formés par les intervalles 5/4 d'une part, et d'autre part, ceux formés par les intervalles 6/5 et 7/6. L'intervalle 5/4 est encore plus grand que le double de son reste ce qui n'est pas le cas dans les deux autres. En effet, $(16/15)^2$ est beaucoup plus petit que 5/4, alors que $(10/9)^2$ et $(8/7)^2$ sont respectivement plus grands que 6/5 et 7/6. Les genres formés par les intervalles 6/5 et 7/6 seront appelés « *rāsim*-s » et par l'intervalle 5/4 les genres *mulawwan ta'līfī*-ss. En établissant les partages, le but d'Ibn Sīnā est de trouver les divisions les « plus homogènes possibles ». Pour cette fin, le deuxième intervalle sera divisé en deux, trois , quatre ou cinq intervalles.

24. Deux autres genres « utiles à la composition » sont rajoutés dans les tableaux récapitulatifs : 8/7, 13/12, 14/13 et 6/5, 16/15, 25/24 ((Id., *Kitāb al-Mūsīqā al-Kabīr*, p. 317) ; dans (d'Erlanger, op. cit., p. 114) seul le premier est indiqué).

25. Selon l'édition que nous possédons (Abū 'Alī Ibn Sīnā. "*Ǧawāmi' 'ilm al-mūsīqā* [Compendium sur la science de la musique]". Dans : *Kitāb al-šifā [Livre de la guérison]*. Éd. par Zakariyyā Yūsuf. T. 1. Révisé par A. F. Ahwānī et M. A. al-Ḥifnī. *Maktabat Miṣr*, 1956), les deux départages indiqués par une étoile ont été écarté par Ibn Sīnā et n'ont pas été entièrement calculé. Par ailleurs, Ibn Sīnā donne la forme **8/7**, 14/13, 13/12, appréciée par Ptolémée, tout en voulant donner la forme : **8/7**, 13/12, 14/13

Les genres qui se forment avec l'intervalle 7/6 sont les plus proches des genres forts. Le premier s'obtient par la division en deux moitiés de l'intervalle 8/7 pour donner les intervalles 16/15 et 15/14. Le deuxième par la division de l'intervalle de 8/7 en trois regroupé deux tiers et un tiers. Autrement dit, l'intervalle de 8/7 partagé en trois donne les intervalles 24/23, 23/22, 22/21 ; le premier intervalle du genre sera le 7/6, le deuxième sera l'intervalle formé par les deux tiers 24/23 et 23/22, c'est à dire l'intervalle 24/22=12/11 ; le troisième intervalle sera de rapport 22/21.

Si on divise l'intervalle 8/7 en quatre parties, on ne pourra avoir que les consonances obtenues par la division en deux. La division en cinq de ce même intervalle 8/7=40/35 et sa répartition en un cinquième et quatre cinquième donnera deux intervalles consonants 10/9 et 36/35. On aura donc le genre *rasim* ayant pour rapports : 7/6, 10/9, 36/35 :

16, 15, 14, 12 ==> 16/15, 15/14, **7/6**
28, 24, 22, 21 ==> **7/6**, 12/11, 22/21
40, 36, 35, 30 ==> 10/9, 36/35, **7/6**

Passons maintenant à l'intervalle 6/5, qui - une fois retranché de la quarte - fournit l'intervalle 10/9. Ce dernier divisé en deux moitiés donne les deux intervalles 20/19 et 19/18. Un autre genre est établit à partir de la division en trois de l'intervalle 10/9 et sa répartition en un tiers et deux tiers. Il aura pour rapports 6/5, 15/14 et 28/27. On peut aussi, à partir de l'intervalle 10/9, avoir 25/24 et 16/15 pour former avec l'intervalle 6/5 le dernier des genres *rasim*-s :

20, 19, 18, 15 ==> 20/19, 19/18, **6/5**
36, 30, 28, 27 ==> **6/5**, 15/14, 28/27
60, 50, 48, 45 ==> **6/5**, 25/24, 16/15

En ce qui concerne les genres *ta'līfī*-s, leur intervalle caractéristique - comme précisé plus haut - est le 5/4. Si on partage son reste 16/15 en deux moitiés, on obtiendra les deux intervalles 32/31 et 31/30. Ibn Sīnā donne les deux autres genres suivants sans préciser la manière de les obtenir : 5/4, 26/25, 40/39 et 5/4, 28/27, 36/35. Mais le premier est obtenu en départageant l'intervalle 16/15 en 5, et le deuxième, complexe, en multipliant les termes du rapport 16/15 par 63 (16/15 = 1008/945) [26] :

40, 32, 31, 30 ==> **5/4**, 32/31, 31/30
80, 78, 75, 60 ==> 40/49, 26/25, **5/4**
36, 35, 28, 27 ==> 36/35, **5/4**, 28/27

Ibn Sīnā récapitule donc que le nombre des genres « en faveur » est 16. Il indique que les intervalles composant les genres peuvent être disposés de trois façons différentes, mais ne détaille pas ces genres, ce que fera al-Urmawī dans la *Risāla Šarafiyya*.

2.3 L'après al-Urmawī et la coexistance de deux systèmes

Au XIIIe siècle, l'éminent musicien et théoricien Ṣafī al-Dīn al-Urmawī (v. 1216–1294) rédige deux ouvrages sur la musique. Le premier, *Kitāb al-Adwār*, expose un système

26. On peut s'étonner qu'Ibn Sīnā ne donne pas par ex. le départage 46/45, 24/23, **5/4**, pourtant simple, qu'on obtient par la multiplication de 16/15 par 3.

développé basé sur le cycle des quintes, alors que le deuxième, *al-Risāla al-Šarafiyya*, reprend les éléments théoriques développés par Ptolémée, al-Fārābī et Ibn-Sīnā. Il serait cependant erroné de penser que le système exposé dans le deuxième ouvrage a supplanté le premier. Le *Kitāb al-Adwār* a été traduit en persan, turc et commenté à plusieurs reprises, sans toutefois altérer ses fondements.

N°op.[27]	Rapport de fréquence	Intervalle	Note	نغمة
1	1	corde libre	A	أ
9	$(4/3) \times (8/9)^2 = 256/243$	4^te^ - *diton* = *limma*	B	ب
14	$(4/3)^2 \times (256/243) \times (2/3) \times (8/9) = (256/243)^2$	*3^ce^ Zalzal* - ton = 2^nd^ Zalzal (=*dilimma*)	Ǧ	ج
6	$9/8$	ton	D	د
8	$(4/3) \times (8/9) = 32/27$	4^te^ - ton	H	هـ
13	$(4/3)^2 \times (256/243) \times (2/3)$	double 4^te^ + *limma* - 5^te^ = 3^ce^ Zalzal	W	و
7	$(9/8)^2 = 81/64$	*diton*	Z	ز
4	$4/3$	4^te^	Ḥ	ح
11	$(256/243) \times (4/3)$	*limma* + 4^te^	Ṭ	ط
15	$(4/3)^2 \times (256/243) \times (2/3) \times (8/9) \times (4/3)$	2^nd^ Zalzal + 4^te^	Y	ي
3	$3/2$	5^te^	YA	يا
10	$(256/243) \times (3/2)$	*limma* + 5^te^	YB	يب
17	$(4/3)^2 \times (256/243) \times (2/3) \times (4/3)$	3^ce^ Zalzal + 4^te^	YǦ	يج
18	$(81/64) \times (4/3)$	*diton* + 4^te^	YD	يد
5	$(4/3)^2$	double 4^te^	YH	يه
12	$(256/243) \times (4/3)^2$	*limma* + double 4^te^	YW	يو
16	$(4/3)^2 \times (256/243) \times (2/3) \times (8/9) \times (4/3)^2$	2^nd^ Zalzal + double 4^te^	YZ	يز
2	$2/1$	8^ve^	YḤ	يح

2.4 Al-Širwānī, un système à *limma*-s

Al-Širwānī[28] transmet également la division d'al-Urmawī, propose de diviser la deuxième octave de la même manière que la première[29], mais indique aussi la possibilité de l'obtenir par une division en moitiés[30]. Cependant, selon al-Širwānī[31], certains personnages auraient indiqué que la manière la plus claire d'obtenir les frettes s'effectuerait

28. Mort vers 1453. Voir O. Wright : Širwānī, *in* "The New Grove Dictionary of Music and Musicians" ; ainsi que E. Neubauer : *Fatḥ Allāh al-Shirwānī : Majalla fī'l-mūsīqī* (Codex on Music), Institut für Geschichte der Arabischen-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Univ, 1986, Frankfurt am Main. Reproduction à partir du MS. 3449 Ahmet III Collection, Topkapı Sarayı Library, Istanbul. C'est à cette édition fac-similé que nous nous référons dans cette section.

29. Eckhard Neubauer, éd. *Fatḥ Allāh al-Shirwānī : Majalla fī'l-mūsīqī (Codex on Music)*. T. C26. Facsimile Editions. Reproduit à partir du MS 3449 Ahmet III Collection, Topkapı Sarayı Library, Istanbul. Frankfurt am Main : Institut für Geschichte der Arabischen-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Univ, 1986, p. 71.

30. Ibid., p. 71–72.

31. Ibid., p. 74–76.

en divisant la corde en 256 sections égales. Après avoir indiqué B sur la treizième de ces sections [32] réalisées sur une corde AM, on procéderait ensuite en divisant BM en 256 sections. On indiquera par la suite Ǧ à la treizième, et on poursuivra de la meme manière pour obtenir les positions suivantes à chaque treizième division : ǦM —> D ; DM —> H ; HM —> W ; WM –> Z ; ZM —> Ḥ ; ḤM —> Ṭ ; ṬM —> Y ; YM —> YA ; YA-M —> YB ; YB-M —> YǦ ; YǦ-M —> YD ; YD-M —> YH ; YH-M —> YW ; YW-M —> YZ ; YZ-M —> YḤ.

La procédure se résume donc aux relations suivantes :

AB = $(256 : 243)^1$; AǦ = $(256 : 243)^2$; AD = $(256 : 243)^3$; AH = $(256 : 243)^4$; AW = $(256 : 243)^5$; AZ = $(256 : 243)^6$; AḤ = $(256 : 243)^7$; AḤ = $(256 : 243)^8$; A-Y = $(256 : 243)^9$; A-YA = $(256 : 243)^{10}$; A-YB = $(256 : 243)^{11}$; A-YĠ = $(256 : 243)^{12}$; A-YD = $(256 : 243)^{13}$; A-YH = $(256 : 243)^{14}$; A-YW = $(256 : 243)^{15}$; A-YZ = $(256 : 243)^{16}$; A-YḤ = $(256 : 243)^{17}$.

où nous voyons que les intervalles principaux disparaissent, puisque A-YḤ$\neq (2 : 1)$, A-YA$\neq (3 : 2)$, A-Ḥ$\neq (4 : 3)$ et A-D$\neq (9 : 8)$. Toutefois, nous obtenons, comme le fait remarquer al-Šhirwānī, 17 notes, où chaque note forme avec celle qui la suit le rapport du *limma* : aucun intervalle n'est plus petit qu'un autre, mais tous dans la même proportion de 256 : 243. La division d'al-Urmawī serait alors « utile » mais impliquerait une « dispersion (*mūgib li al-intišār*) » [33]. Nous voyons ici qu'une régularité dans la procédure de division du monocorde est senti comme primordiale. Par ailleurs, al-Širwānī indique que d'autres personnes avaient remis en cause, par d'autres approches, la division d'al-Urmawī [34].

3 Le tempérament égal et la commensurabilité forcée

La recherche d'une commune mesure pour l'`octave` ne sera pas abandonnée. Il s'agit, dans une certaine pensée, d'un idéal qui n'a jamais été abandonné. En effet, il était plus facile et plus pratique pour les musiciens de tout temps de penser que les intervalles qu'ils effectuaient étaient égaux, même si dans la réalité, ils ne l'étaient pas. La division acoustique de l'`octave` en *n* intervalles égaux, dénommée aujourd'hui « tempérament égal », était donc recherchée [35]. Par l'évolution du calcul avec racine ainsi que par la maîtrise l'obtention des moyennes géométriques par méthodes géométriques, une division de l'`octave` en intervalles égaux était devenue possible. Cette réalisation a eu lieu en Chine depuis le XVIe s avec Zhu Zaiyu (1536–1610), puis en Europe grâce entre autres à Simon Stevin (1548–1620) et Marin Mersenne (1588 – 1648) [36]. Dans le

32. Le nombre 13 est en effet la différence entre 256 et 243, les deux termes du *limma*.

33. Neubauer, op. cit., p. 76.

34. Ibid., p. 79.

35. Évidemment, dans une telle division, les intervalles de base, `quinte`, `quinte` et `ton`, n'auront plus les rapports 3 : 2, 4 : 3 et 9 : 8. Ils sonneront alors légèrement faux.

36. Rudolf Rasch. "Music and Mathematics in Late Medieval and Early Modern Europe". Dans : éd. par Vendrix Philippe. Turnhout : Brepols Publishers, 2008. Chap. Simon Stevin and

contexte arabe, il faudra attendre le XIX[e] pour que le besoin de diviser l'octave en 24 quarts de ton égaux apparaîsse. C'est le libanais Miḫā'īl Mišāqa (1800–1888) qui présente dans sa *Risāla Šihābiyya* une explication numérique de cette division, suivit d'une description de sa construction géométrique [37] [38]. En réalité le but de Mišāqa — mathématicien et musicien amateur —, était de montrer à son maître, Muḥammad al-'Attar — musicien professionnel —, qu'une division de la corde en 24 segments aliquotes ne donnait pas une division égale de l'octave en 24 quarts de ton comme il le prétendait. Il est toutefois peut probable que l'ouvrage de Mišāqa ait influencé directement la pratique musicale [39]. Cette division en 24 quarts de ton réellement égaux prendra plus d'ampleur dans les années 80, avec le développement de l'électronique et l'apparition du « synthétiseur oriental » contenant des touches à quarts de ton.

Conclusion

En observant le contexte de la découverte de l'incommensurabilité de l'octave et son développement aussi bien dans le monde grec qu'à travers les écrits arabes, nous avons présenté les principales étapes de l'évolution du problème que nous pensons être le plus important de l'histoire musico-mathématique. Ce problème a eu non seulement un impact sur l'évolution des théories musicales, mais il influença sans doute la facture des instruments de musique. Cependant, son émergeance s'accompagne de réflexions sur le son et sur sa nature puisqu'il était nécessaire de montrer que la production du son relève de la quantité afin de pouvoir être calculé mathématiquement. Ainsi, l'histoire des sciences musicales greco-arabes ne limite pas aux problèmes purement mathématiques, mais elle est concernée également par la nature physique et acoustique du son, ainsi que par le développement des techniques de la facture instrumentale. Approfondir l'étude de ces deux phénomènes nous permettera d'apprécier cette histoire non seulement dans sa globalité mais aussi dans sa totalité.

Littérature

Ibn Sīnā, Abū 'Alī. "*Ǧawāmi' 'ilm al-mūsīqā* [Compendium sur la science de la musique]". Dans : *Kitāb al-šifā [Livre de la guérison]*. Éd. par Zakariyyā Yūsuf. T. 1. Révisé par A. F. Ahwānī et M. A. al-Ḥifnī. *Maktabat Miṣr*, 1956.

the Calculation of Equal Temperament. ISBN : 978-2-503-51597-7 ; Gene Jinsiong Cho. *The discovery of musical equal temperament in China and Europe in the sixteenth century*. NY (Lewiston) : Mellen Press, 2003.

37. Miḫā'īl Mišāqa. *al-Risāla al-Šihābiyya fī al-Ṣinā'a al-Mūsīqiyya*. Éd. par Isis Fatḥalla. texte établi par Isis Fatḥalla. al-Qāhira : Dār al-fikr al-'arabī, 1996, p. 118–128.

38. Shireen Maalouf. "Mīkhā'īl Mushāqā : Virtual Founder of the Tewenty-four Equal Quarter Scale". Dans : *Journal of the American Oriental Society* 123.4 (2003), p. 835–840.

39. Mais le cercle politico-culturel égyptien du début du XX[e] s. a voulu imposer cette divison (Anas Ghrab. "The Western Study of Intervals in « Arabic Music, » from the Eighteenth Century to the Cairo Congress". Dans : *The World of Music* 3.48 [2005]).

Barbera, André. *The Euclidean Division of the Canon : Greek and Latin Sources*. Greek and Latin Music Theory. Lincoln et London : University of Nebraska Press, 1991.

Caveing, Maurice. *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*. Paris : Presses Universitaire du Septentrion, 1998. isbn : 9-782859-39539-1.

Chabrier, Jean-Claude. "Histoire des sciences arabes". Dans : t. 2. Paris : Seuil, 1997. Chap. Science musicale, p. 231–262. isbn : 2-02-030353-1.

Cho, Gene Jinsiong. *The discovery of musical equal temperament in China and Europe in the sixteenth century*. NY (Lewiston) : Mellen Press, 2003.

d'Erlanger, Rodolphe. *La Musique Arabe*. T. 1. Paris : Paul Geuthner, 1930.

al-Fārābī, Abū Naṣr. *Kitāb al-Mūsīqā al-Kabīr*. Texte établi par Ġaṭṭās 'Abd al-Malik Ḫašaba. al-Qāhira 1967.

— *Kitāb al-Mūsīqī al-Kabīr, Grand Book of Music, by Abū Naṣr al-Fārābī*. Éd. par Eckhard Neubauer. T. C61. Facsimile Editions. Frankfurt am Main : Institut für Geschichte der Arabischen-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Univ, 1998.

Ghrab, Anas. "The Western Study of Intervals in « Arabic Music, » from the Eighteenth Century to the Cairo Congress". Dans : *The World of Music* 3.48 (2005).

Maalouf, Shireen. "Mīkhā'īl Mushāqā : Virtual Founder of the Tewenty-four Equal Quarter Scale". Dans : *Journal of the American Oriental Society* 123.4 (2003), p. 835–840.

Mišāqa, Miḫā'īl. *al-Risāla al-Šihābiyya fī al-Ṣinā'a al-Mūsīqiyya*. Éd. par Isis Fatḥalla. texte établi par Isis Fatḥalla. al-Qāhira : Dār al-fikr al-'arabī, 1996.

Neubauer, Eckhard, éd. *Fatḥ Allāh al-Shirwānī : Majalla fī'l-mūsīqī (Codex on Music)*. T. C26. Facsimile Editions. Reproduit à partir du MS 3449 Ahmet III Collection, Topkapı Sarayı Library, Istanbul. Frankfurt am Main : Institut für Geschichte der Arabischen-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Univ, 1986.

Rasch, Rudolf. "Music and Mathematics in Late Medieval and Early Modern Europe". Dans : éd. par Vendrix Philippe. Turnhout : Brepols Publishers, 2008. Chap. Simon Stevin and the Calculation of Equal Temperament. isbn : 978-2-503-51597-7.

Solomon, Jon. *Ptolemy Harmonics : Translation & Commentary*. Mnemosyne. Leiden-Boston-Köln : Brill, 2000. isbn : 90-04-11591-9.

Szabó, Árpád. *L'aube des mathématiques grecques*. Paris : Vrin, 2000.

— *Les débuts des mathématiques grecques*. Paris : Vrin, 1977.

al-Urmawī. *Kitāb al-Adwār*. Éd. par 'Abd al-Malik Ḫašaba Ġaṭṭās. al-Qāhira : al-Hay'a al-Miṣriyya al-'Āmma li al-Kitāb, 1986. isbn : 977-01-1033-7.