

Le problème de  
l'incommensurabilité de l'octave et son évolution

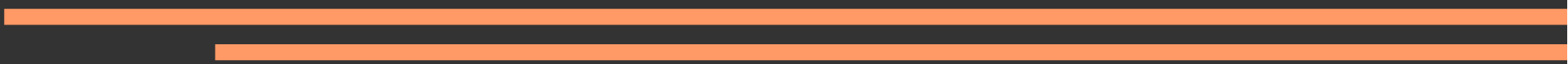
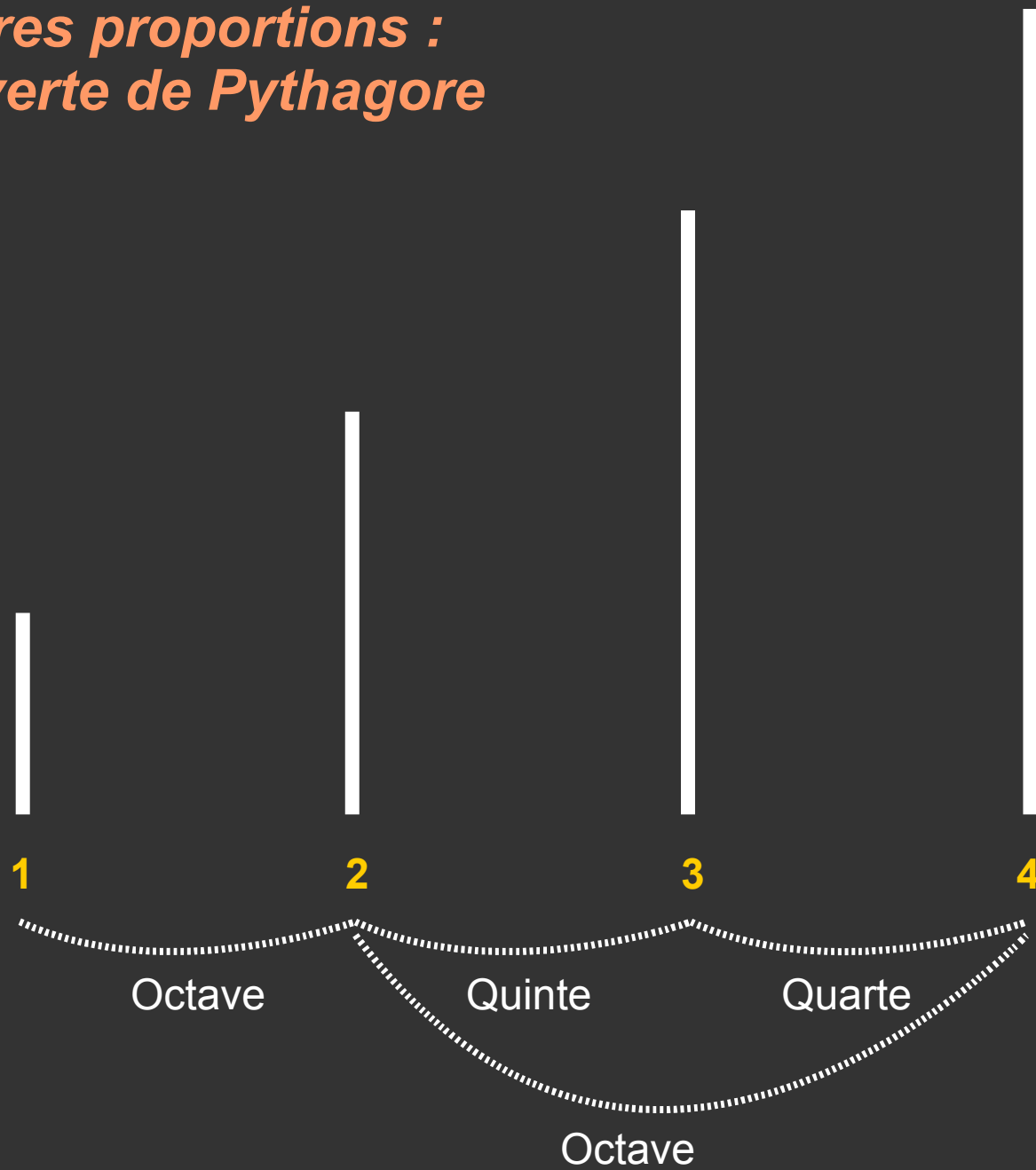
Anas GHRAB

ENIT, Semaine ATHENS : *Histoire de l'algèbre*  
20 novembre 2013

---

---

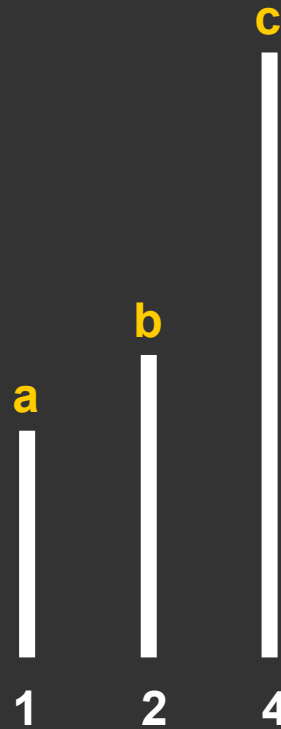
*Les premières proportions :*  
*la redécouverte de Pythagore*



# Les trois médités (moyennes) : Archytas



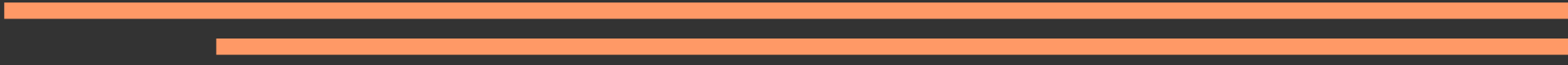
Médiété arithmétique  
 $c - b = b - a$



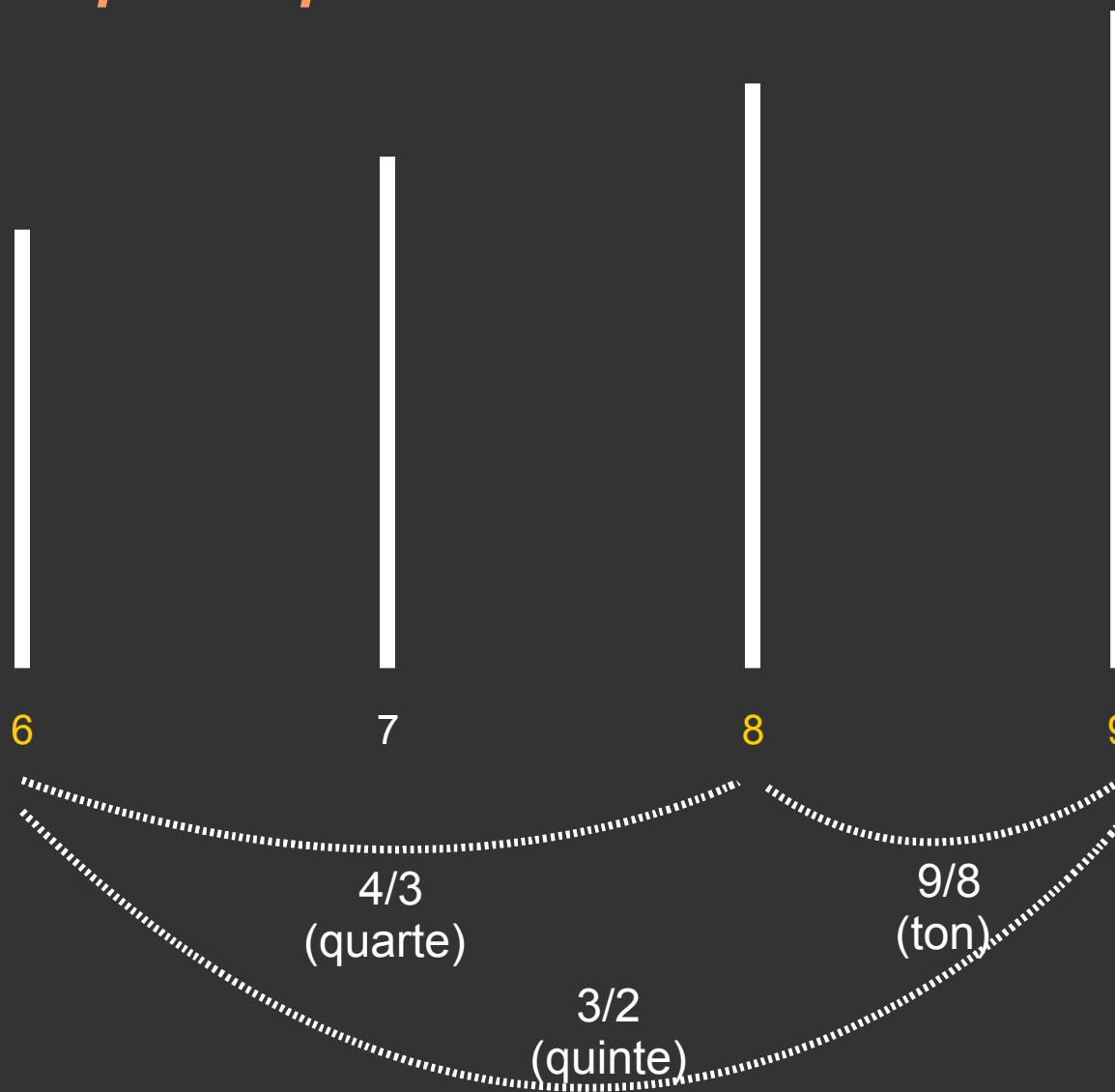
Médiété géométrique  
 $c/b = b/a$



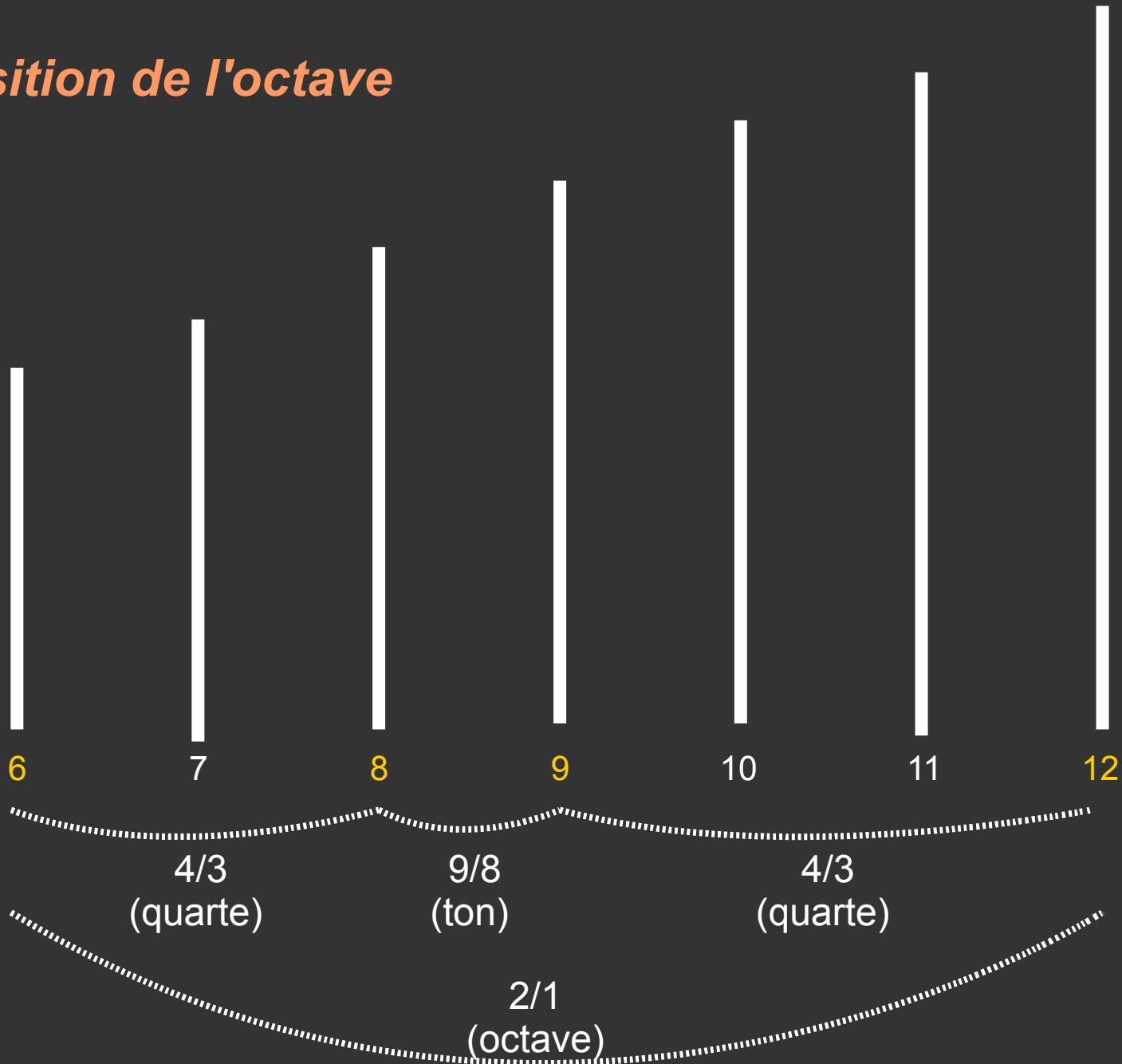
Médiété harmonique  
 $(c - b) / (b - a) = c/a$



## *Le surplus de la quinte/quarte*



# Composition de l'octave

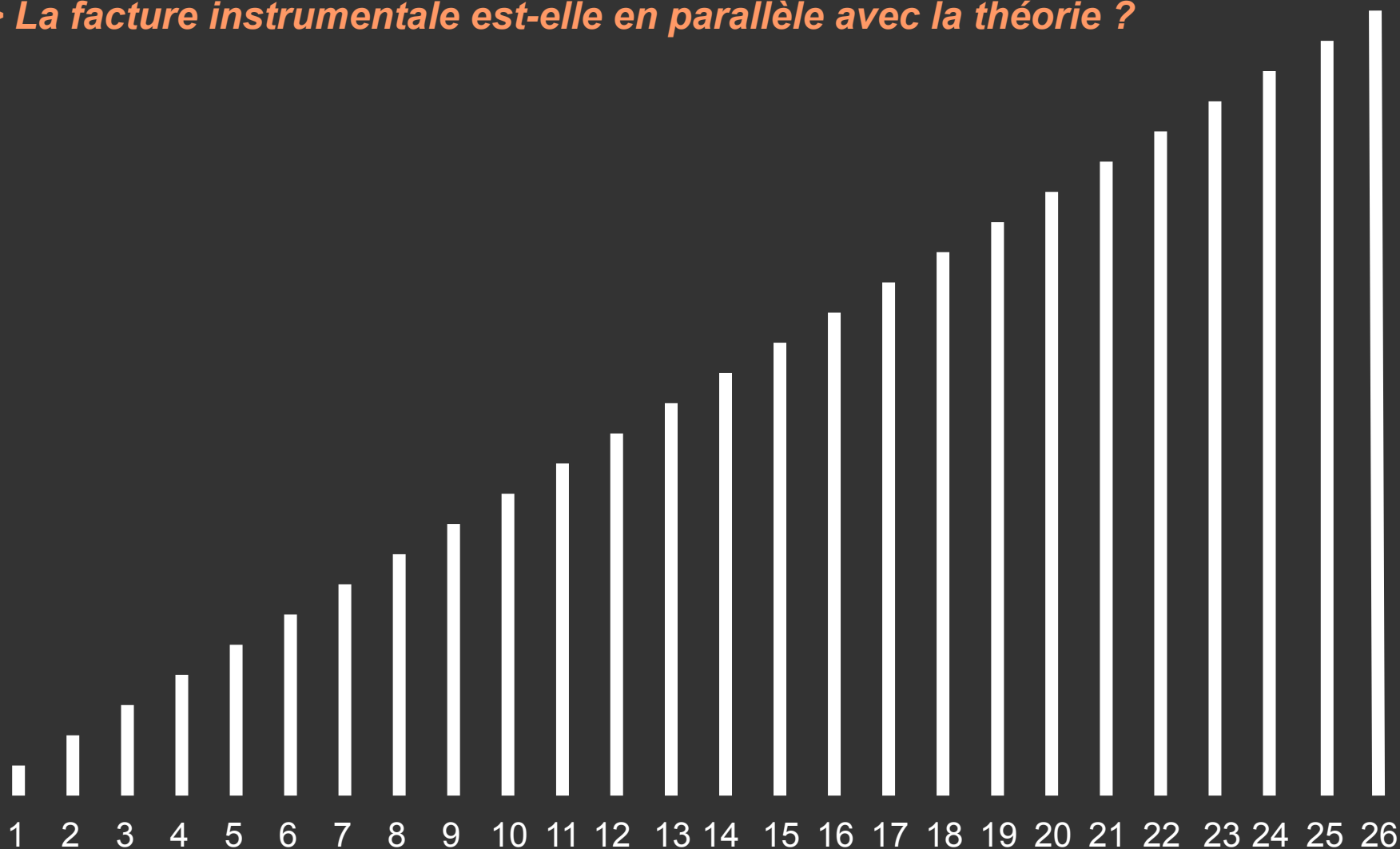


## Suite des entiers naturels

=> Harpes antiques

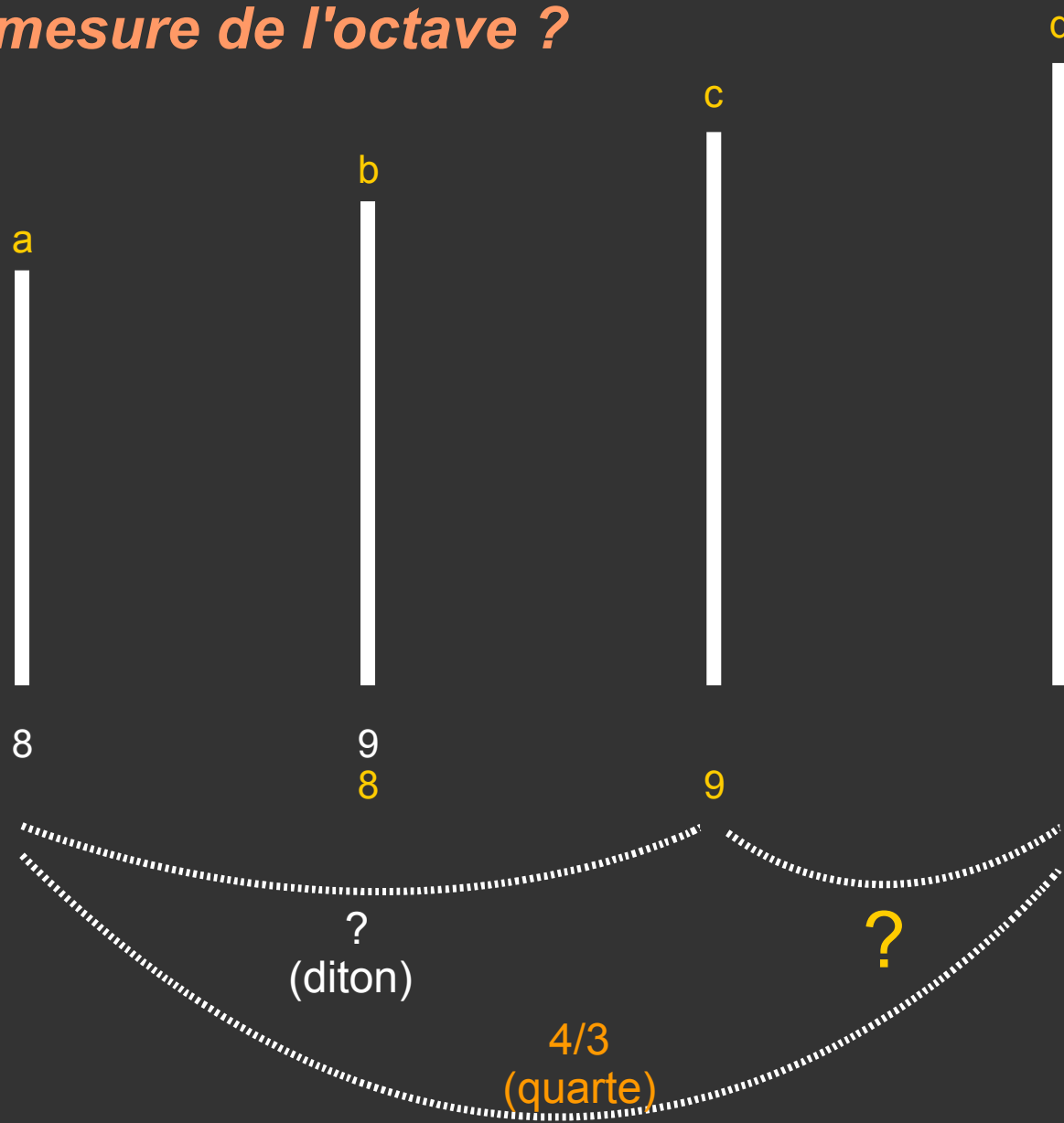
=> *κανών*, instrument grec, devenu Qānūn

=> La facture instrumentale est-elle en parallèle avec la théorie ?

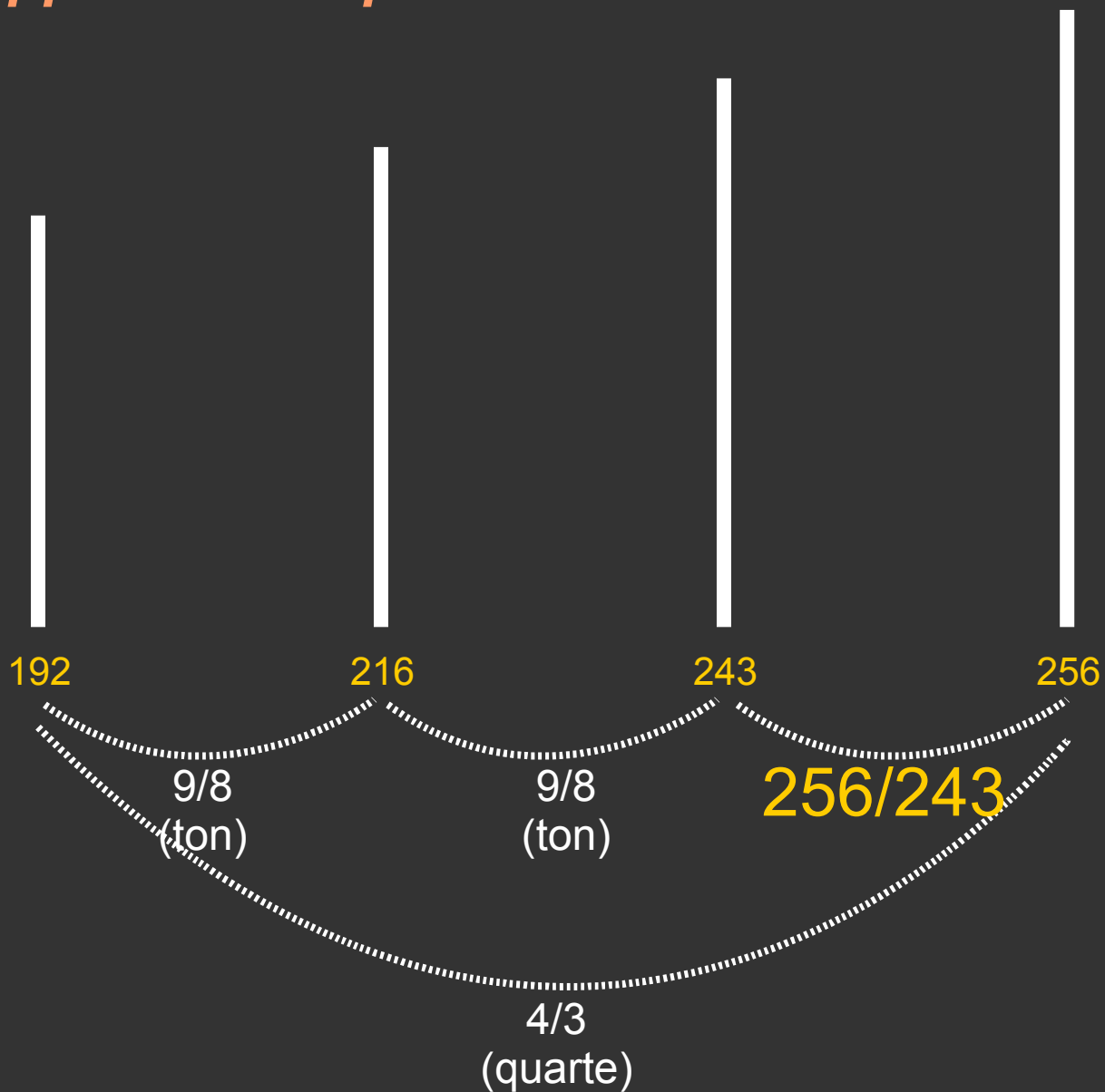


# Le Limma : unité de mesure de l'octave ?

$$\begin{aligned}d/a &= 4/3 \\ b/a &= c/b = 9/8 \\ d/c &= ?\end{aligned}$$



## Le Limma : rapport donné par Platon



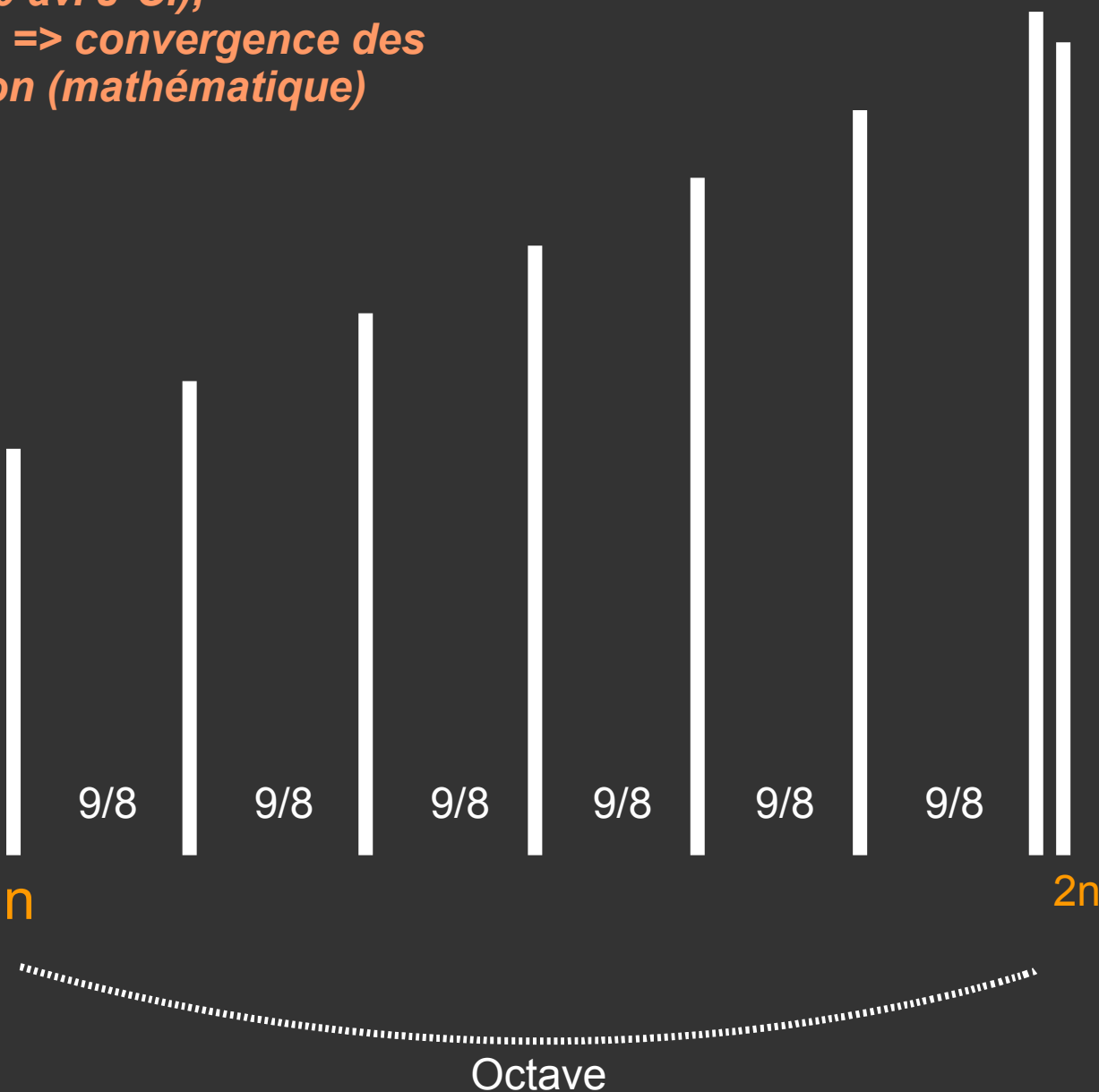


# Six tons (9/8) dépassent l'octave

Démontré par Euclide (v. 300 av. J-C.),

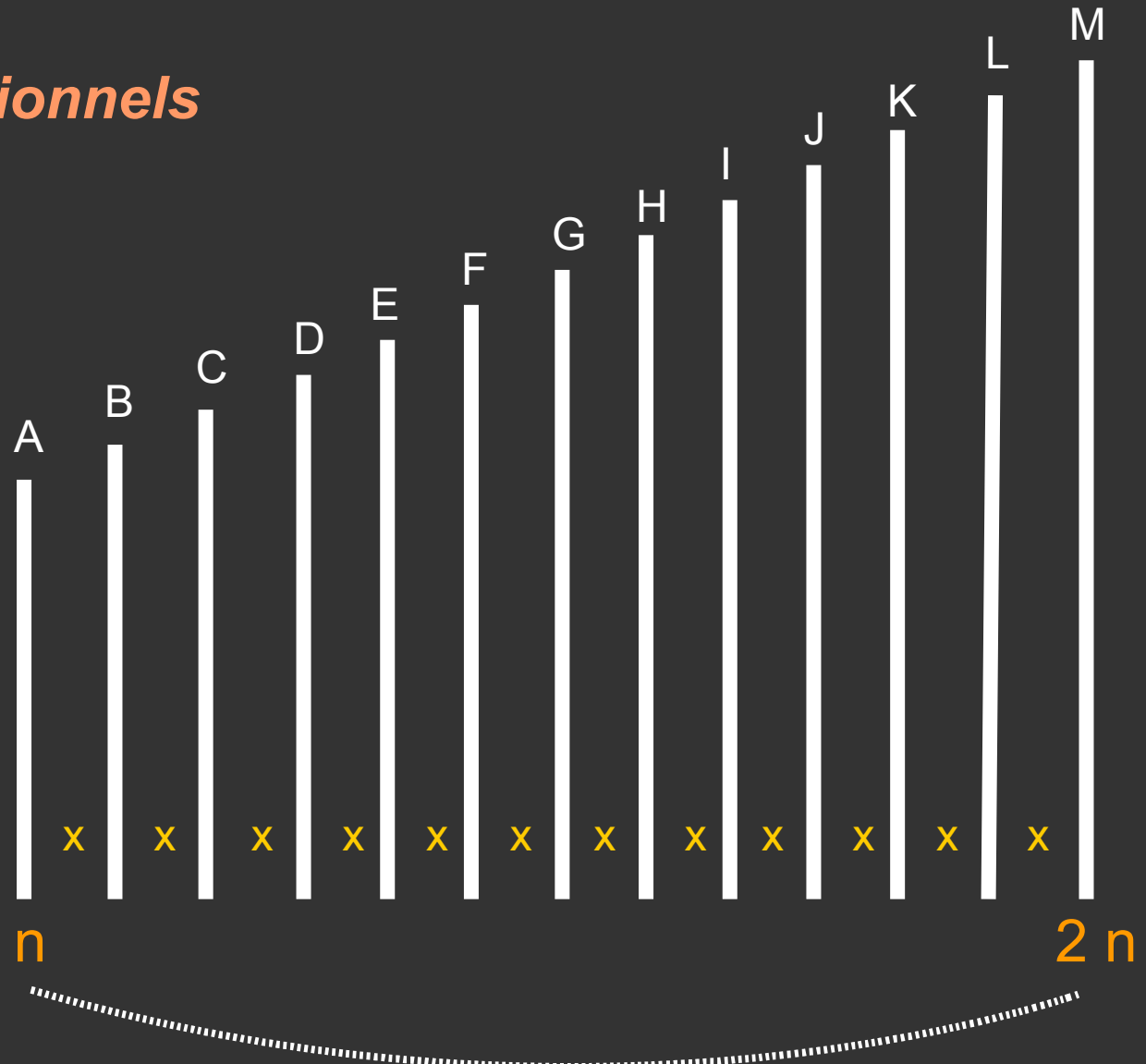
Ptolémé d'Alexandrie (IIe s.) => convergence des sens (audition) et de la raison (mathématique)

$$(9/8)^6 > 2$$



# Découverte des irrationnels

$$X = \sqrt[12]{2}$$



Octave avec 12 intervalles égaux

- Archytas se jette à mer
- Aristoxène de Tarente refuse les mathématiques dans la musique



## « Arithmétique » des intervalles musicaux Ptolémée (?), Nicomaque (?), avant (?)

- Addition des intervalles : multiplication des rapports
- Soustraction des intervalles : division des rapports

$$\text{Quinte} + \text{quarte} = 3/2 \times 4/3 = 2/1$$

$$\text{Quinte} - \text{quarte} = 3/2 \times 3/4 = 9/8$$

$$\text{Ton} + \text{ton} = 9/8 \times 9/8 = 81/64$$

$$\text{Limma} = 4/3 \times (8/9)^2 = 256/243$$

# Une théorie arithmético-acoustique de la musique

*Archytas, Ptolémée d'Alexandrie, al-Fārābī, Ibn Sīnā, al-Khayyām, al-Urmawī 2, etc.*

- $4/3 = 8/7 \times 9/8 \times 28/27$
- $4/3 = 9/8 \times 10/9 \times 16/15$
- $4/3 = 10/9 \times 11/10 \times 12/11$
- $4/3 = 8/7 \times 8/7 \times 49/48$
- $4/3 = 9/8 \times 9/8 \times 254/243$
- $4/3 = 10/9 \times 10/9 \times 27/25$
- ...

=> Forme intervallique fondamentale  $(n+1) / n$

---

---